АНО СПО «БИРСКИЙ КООПЕРАТИВНЫЙ ТЕХНИКУМ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

УЧЕБНАЯ ДИСЦИПЛИНА

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

Специальность 42.02.01. Реклама

2018

Методические рекомендации по выполнению практических работ предназначены для закрепления теоретических знаний и приобретение необходимых практических навыков и умений по программе учебной дисциплины « ЕН.01. МАТЕМАТИКА» составлены в соответствии с учебным планом и рабочей программой учебной дисциплины «ЕН.01. МАТЕМАТИКА» по специальности среднего профессионального образования 42.02.01. Реклама

Организация-разработчик: АНО СПО «Бирскооптехникум»

Составитель: Мухаметова С.Е.

ОДОБРЕНО Методическим советом техникума
Протокол № 9 от «29» 06 2018 г.
Председатель Методсовета ______/Лутфулина А.А./

РАССМОТРЕНО
на заседании ПЦК УГ. 42.00.00 Средства массовой информации
информационно-библиотечное дело
Протокол № 5 от «29» 06 2018 г.
Председатель ПЦК ______/Ахкамова М.И./

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания предназначены для организации эффективной практической работы студентов. Практическая работа направлена на повышение качества подготовки компетентного конкурентоспособного специалиста, приспособленного к самостоятельной профессионально-ориентированной деятельности на основе сформированных знаний, умений, опыта, общих и профессиональных компетенций.

Практическая работа должна содействовать активизации познавательной деятельности студентов, развитию творческого отношения к учебной деятельности, формированию навыков самостоятельного труда, умению решать профессиональные задачи, формированию потребности к непрерывному самообразованию, совершенствованию знаний и умений, расширению кругозора, приобретению опыта планирования и организации рабочего времени, выработке умений и навыков самостоятельной работы с учебной литературой, обеспечению ритмичной и качественной работы студентов в течение учебного года.

В качестве форм и методов контроля практической работы студентов используются задания по темам на аудиторных занятиях.

В процессе выполнения практических заданий студент должен

уметь:

- применять математические методы для решения профессиональных задач;
- использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях;
- *выполнять операции над матрицами, вычислять определители;*
- *решать системы линейных уравнений;*
- *выполнять действия над комплексными числами;*

знать:

- основные понятия и методы математического синтеза и анализа, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики.
- *элементы линейной алгебры;*
- *основы теории комплексных чисел*.

Результатом освоения дисциплины и выполнения практических заданий является овладение студентами следующими ***компетенциями***:

ОК. 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК. 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК. 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК. 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК. 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК. 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.

ОК. 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК. 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ОК. 10. Владеть основами предпринимательской деятельности и особенностями предпринимательства в профессиональной деятельности.

ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Практические занятия проходят согласно учебному плану под руководством преподавателя при его непосредственном участии. Они представляют собой один из важнейших элементов изучения предмета и предназначены для углубления, расширения и закрепления знаний и умений.

Подготовка к практической работе

- В начале каждой темы преподаватель заранее объявляет о предстоящей практической работе, о количестве и видах практических работ, информирует о содержании и целях работы, порядке ее выполнения.
- Преподаватель предлагает обучающимся практическое выполнение задания по алгоритму.
- Преподаватель выдает бланки заданий обучающимся, обучающиеся приступают к выполнению работы: читают задание, задают вопросы, в тетради или на отдельном листе оформляют отчет.
- Преподаватель подробно инструктирует студентов о ходе предстоящей работы: называет тему, цели, требования к выполнению работы, форму отчета, а также критерии ее оценивания

Выполнение практической работы

- Обучающийся должен стремиться к аккуратности, полноте записей, работа должна быть выполнена полностью.
- Если в процессе подготовки к практическим работам или при их выполнении у обучающегося возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается, необходимо обратиться к преподавателю для получения разъяснений или указаний.
- Наличие положительной оценки по практическим работам необходимо для получения зачета по дисциплине, поэтому в случае отсутствия на занятии по любой причине или получения неудовлетворительной оценки за практическую работу обучающийся должен найти время для ее выполнения или пересдачи во внеурочное время. В случае невыполнения практической работы обучающийся для промежуточной аттестации по дисциплине сдает зачет в установленной форме.
- Дополнительные занятия (для проведения консультаций, исправления неудовлетворительных оценок и ликвидации задолженностей) проводятся по предварительному согласованию с преподавателем.

Оформление практической работы

- Отчет о работе составляется по каждой выполненной работе на основе записей в тетради, работа должна содержать: ФИО обучающегося, выполнившего работу, ее наименование и дату выполнения.

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ РАБОТЫ

При оценке результатов выполнения практических работ студентами учитываются:

- уровень освоения студентом учебного материала;
- уровень сформированности умения использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
- умения обучающегося активно использовать электронные образовательные ресурсы, находить требующуюся информацию, изучать ее и применять на практике;
- умение ориентироваться в потоке информации, выделять главное;
- умение четко сформулировать проблему, предложив ее решение, критически оценить решение и его последствия;
- умение показать, проанализировать альтернативные возможности, варианты действий;
- умение сформировать свою позицию, оценку и аргументировать ее.
- уровень сформированности общих компетенций;
- уровень сформированности профессиональных компетенций;
- оформление материала в соответствии с предъявляемыми требованиями

Организация и руководство практическими работами студентами осуществляется преподавателем.

Оценка ***«отлично»*** *ставится:*

- студент свободно применяет знания на практике;
- студент не допускает ошибок в воспроизведении изученного материала;
- студент выделяет главные положения в изученном материале и не затрудняется в ответах на видоизмененные вопросы;
- студент усваивает весь объем программного материала;
- материал оформлен аккуратно и в соответствии с требованиями;

Оценка ***«хорошо»*** *ставится:*

- студент знает весь изученный материал;
- студент без особых затруднений отвечает на вопросы преподавателя;
- умеет применять полученные знания на практике;
- в условных ответах не допускает серьезных ошибок, легко устраняет определенные неточности с помощью дополнительных вопросов преподавателя;
- материал оформлен недостаточно аккуратно, но в соответствии с требованиями;

Оценка ***«удовлетворительно»*** *ставится:*

- студент обнаруживает освоение основного материала, но испытывает затруднения при его самостоятельном воспроизведении и требует дополнительных дополняющих вопросов преподавателя;
- предпочитает отвечать на вопросы воспроизводящего характера и испытывает затруднения при ответах на воспроизводящие вопросы;
- материал оформлен неаккуратно или не в соответствии с требованиями;

Оценка ***«неудовлетворительно»*** *ставится:*

- у обучающегося имеются отдельные представления об изучаемом материале, однако большая часть не усвоена;
- допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере

Оценка индивидуальных образовательных достижений по результатам текущего и итогового контроля производится в соответствии с универсальной шкалой (таблица).

Процент результативности (правильных ответов)	**Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений**	
	балл (отметка)	**вербальный аналог**
90 ÷ 100	5	отлично
75 ÷ 89	4	хорошо
51 ÷ 74	3	удовлетворительно
менее 50	2	не удовлетворительно

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ТЕМАМ

№	Наименование практической работы	Время на выполнение практической работы (в аудитории)
1.	Вычисление пределов функций с использованием первого и второго замечательных пределов, исследование функций на непрерывность, нахождение производных, вычисление производных сложных функций, вычисление простейших определенных интегралов, решение прикладных задач в различных профессиональных ситуациях	2
2.	Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка, линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, решение прикладных задач в различных профессиональных ситуациях	2
3.	Операции над матрицами, вычисление определителей, нахождение обратной матрицы, вычисление ранга матрицы. Применение математических методов для решения профессиональных задач	2
4.	Решение системы линейных уравнений по правилу Крамера и методом Гаусса. Применение математических методов для решения профессиональных задач	2
5.	Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах, переход от алгебраической формы к тригонометрической и к показательной и обратно. Применение математических методов для решения профессиональных задач	2
	ИТОГО:	***10 часов***

СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Практическая работа №1

***Тема:* «**Вычисление пределов функций с использованием первого и второго замечательных пределов, исследование функций на непрерывность, нахождение производных, вычисление производных сложных функций, вычисление простейших определенных интегралов, решение прикладных задач в различных профессиональных ситуациях**»**

Цели и задачи: обобщить и систематизировать знания по теме «Вычисления предела функции», провести диагностику усвоения системы знаний и умений выполнять задания стандартного уровня.

Обеспечение практической работы:

1) Конспект.

2) Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Краткий теоретический материал, примеры вычисления пределов.

Определение предела. Число *b* – предел функции *f(x)* при *x* стремящемся к *a*, если для , что можно указать такое положительной число каждого положительного числа для всех *x*, отличных от *a* и удовлетворяющих неравенству |*x*-*a*|<0, имеет место неравенство |f(x)-b|<0

Обозначение предела. Если *b* есть предел функции *f(x)* при *x* стремящемся к *a*, то записывают это так:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Определение непрерывной функции. Функция *f(x)* непрерывна в точке *a*, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Вычисление пределов функций основано на применении следующих основных теорем:

ТЕОРЕМА 1. Предел суммы двух функций при *x* стремящемся к *a* равен сумме пределов этих функций, то есть

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

ТЕОРЕМА 2. Предел произведения двух функций при *x* стремящемся к *a* равен произведению пределов этих функций, то есть

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

ТЕОРЕМА 3. Предел частного двух функций при *x* стремящемся к *a* равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля, то есть

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad , \quad \text{если} \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

и равен плюс (минус) бесконечности, если предел знаменателя 0, а предел числителя конечен и отличен от нуля.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

Пример 1.

$$\lim_{x\to 7}(x+3) = \lim_{x\to 7} x + \lim_{x\to 7} 3 = 7 + 3 = 10.$$

Комментарий. Здесь была использована теорема о пределе суммы.

Пример 2.

$$\lim_{x\to1}\frac{3x+2}{2x-7}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(3x+2)}{\lim\limits_{x\to1}(2x-7)}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(3x)+\lim\limits_{x\to1}2}{\lim\limits_{x\to1}(2x)+\lim\limits_{x\to1}(-7)}=\frac{\lim\limits_{x\to1}3\cdot\lim\limits_{x\to1}x+2}{\lim\limits_{x\to1}2\cdot\lim\limits_{x\to1}x-7}=$$

$$=\frac{3\cdot1+2}{2\cdot1-7}=5/(-5)=-1.$$

Комментарий. На первом шаге была применена теорема о пределе частного, так как предел знаменателя не равен нулю. На втором шаге использовалась теорема о пределе суммы для числителя и знаменателя дроби. После была применена теорема о пределе произведения

Пример 3. Найти предел

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}.$$

Знаменатель и числитель дроби при x стремящемся к 2 стремятся к нулю, поэтому теорема о пределе частного здесь неприменима. В таких случаях нужно попытаться упростить дробь. Имеем

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2.$$

Это преобразование справедливо при всех значениях x, отличных от 2, поэтому в соответствии с определением предела можем написать

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)=\lim_{x\to2}x+\lim_{x\to2}2=$$
$$=2+2=4.$$

Задание: выполнение задания предполагает наличие развернутого решения.

- ✓ **используя карточки с вариантом задания, вычислить:**

1. Вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to2}(3x+1)$ б) $\lim\limits_{x\to1}\sqrt[3]{x}$ в) $\lim\limits_{x\to3}x^2$ г) $\lim\limits_{x\to2}5^x$ д) $\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x}$;

2. Вычислите пределы следующих функций:

а) $\lim\limits_{x\to1}(5x^4-3x^3+2x^2-3x+5)$

б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5-3^x}{3+2^x}$

в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+x+3}{x+1}$.

3. Используя разложение на множители преобразовать дроби и вычислить предел функции в точке:

а) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}$ б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$ в) $\lim\limits_{x\to-5}\frac{x^2-25}{x+5}$ г) $\lim\limits_{x\to-7}\frac{x^2-49}{x+7}$ д) $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}$

а) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-4x+3}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(x-2)^2-4}{x}$;

в) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2+5x+6}{x^2+x-2}$.

4. Найти предел функции в точке, используя способ избавления знаменателя(числителя) от иррациональности (помножить на сопряженное выражение):

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$; б) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1}$; в) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

1 задания каждое оцениваются в 1 балл	2 и 3 задания каждое оценивается в 2 балла	4 задания каждое оценивается в 3 балла
5 баллов	22 балла	12 баллов

«2»	«3»	«4»	«5»
0-19 б.	20-27 б.	28-34 б.	35-37 б.

Контрольная работа №1 «Дифференциальное и интегральное исчисление»

Цель: провести диагностику усвоения системы знаний и умений выполнять задания.
Задачи: выявить уровень усвоения знаний учащимися.
Инструкция по выполнению работы

На выполнение контрольной работы по математике дается 90 минут. Работа состоит из 3 частей и содержит 12 заданий..

Часть 1 содержит 4 заданий базового уровня по материалу раздела «Интеграл».

Часть 2 содержит 4 более сложных заданий по материалу раздела «Интеграл».

Часть 3 содержит 4 сложных заданий по материалу раздела «Интеграл».

При выполнении всех заданий нужно записать полное решение и ответ. Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

За каждый правильный ответ в зависимости от сложности задания даётся от одного до четырех баллов. Баллы, полученные вами за все выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Вариант 1

Группа А

1. Найти первообразную функции

а) $f(x) = 3x^3 - 4x^2$ б) $f(x) = 2\sin x + x^2$

в) $f(x) = \sin 3x - \frac{1}{2}\cos 2x$

2. Вычислить интеграл

а) $\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{2} \cos x dx$

3. Найти площадь фигуры ограниченной графиком функции

$y = 1 - x^2, y = 0$

4. Для функции $f(x) = x^3$ найдите первообразную, график которой проходит через точку М(1;-1)

Группа В

1. Найти первообразную функции

а) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{}{\sqrt{x}}$ б) $f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2}$

в) $f(x) = \sqrt{6x - 2}$

2. Вычислить интеграл

а) $\int_1^4 \frac{\sqrt{\ }}{x}dx$ б) $\int_{-2}^{0} (x^3 - 3x^2)dx$

3. Найти площадь фигуры ограниченной линиями

$y = 0, y = 2x, y = 3 - x^2, x > 0$

4. Для функции $f(x) = 1 - 4x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку М(-1;9)

Группа С

1. Найти первообразную функции

а) $f(x) = \sqrt{7x+1}$ б)

$f(x) = \sin 3x - \frac{1}{\cos^2 x}$

в) $f(x) = \frac{6x-2}{\sqrt{6x-1}+1}$

2. Вычислить интеграл

а) $\int_1 \frac{\text{ox}}{\sqrt{x}}dx$ б) $\int_{-2} (4x^3 + 6x)dx$

3. Найти площадь фигуры ограниченной линиями

$y = \cos x, y = -2\cos x, -\frac{}{6} < x < \frac{}{2}$

4. Для функции $f(x) = 6\sin 4x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $D(-\frac{\pi}{};0)$

Вариант 2

Группа А

1. Найти первообразную функции

а) $f(x) = 2x - 5x$ б) $f(x) = 3\cos x - x$

в) $f(x) = \cos 5x - \frac{1}{6}\sin 3x$

2. Вычислить интеграл

а) $\int_0 x^2 dx$ б) $\int_0 \sin x dx$

3. Найти площадь фигуры ограниченной графиком функции

$y = 4 - x^2, y = 0$

4. Для функции $f(x) = 2x + 4$ найдите первообразную, график которой проходит через точку В(-1;1)

Группа В

1. Найти первообразную функции

а) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{}{x}$ б)

$f(x) = \cos 3x + \frac{}{\sin x}$

в) $f(x) = (x+2)^4$

2. Вычислить интеграл

а) $\int_1 5\sqrt{x}dx$ б) $\int_0^3 \frac{dx}{\cos^2 x}$

3. Найти площадь фигуры ограниченной линиями

$y = 2\cos x, y = 0, 0 < x < \pi$

4. Для функции $f(x) = -x + 1$ найдите первообразную, график которой проходит через точку М(-2;-3)

Группа С

1. Найти первообразную функции

а) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \cos(3x - 1)$

б) $f(x) \frac{}{\cos^2(\frac{}{2} - \frac{}{3})}$

в) $f(x) = 4\sin 2x - \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} + 1$

2. Вычислить интеграл

а) $\int_1^{2,5} \frac{}{\sqrt{x}}dx$ б) $\int_{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx$

3. Найти площадь фигуры ограниченной линиями

$y = 2\sin x, y = -\sin x, 0 < x < \frac{}{3}$

4. Для функции $f(x) = \sin x + 2\cos x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $A(\frac{\pi}{};0)$

	А1	А2	А3	А4	В1	В2	В3	В4	С1	С2	С3	С4
балл	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5

«5» - 43-48 б.

«4» - 33-42 б.

«3» - 25-33 б.

«2» - 0-24 б.

Практическая работа №2: Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка, линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, решение прикладных задач в различных профессиональных ситуациях

Цель: провести диагностику усвоения системы знаний и умений выполнять задания
Задачи: выявить уровень усвоения знаний учащимися.

Инструкция по выполнению работы

На выполнение контрольной работы по математике дается 90 минут. Работа состоит из 2 частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 10 заданий (А1 – А10) базового уровня по материалу раздела «Производная и ее применение» и оценивается в 2 балла.

Часть 2 содержит 2 более сложных заданий (В1, В2) по материалу раздела «Производная и ее применение» и оценивается в 5 баллов.

При выполнении всех заданий нужно записать полное решение и ответ. Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

За каждый правильный ответ в зависимости от сложности задания даётся от одного до четырех баллов. Баллы, полученные вами за все выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Вариант 1

А1. Найдите производную функции $y = 4x^3$.

1) $12x^2$ 2) $12x$ 3) $4x^2$ 4) $12x^3$

А2. Найдите производную функции $y = 6x - 11$.

1) *-5* 2) *11* 3) *6* 4) *6x*

А3. Найдите производную функции $y = \frac{x-1}{x}$.

1) $-\frac{1}{x^2}$ 2) $\frac{x-1}{x^2}$ 3) $\frac{2x+1}{x^2}$ 4) $\frac{1}{x^2}$

А4. Найдите производную функции $y = x\sin x$.

1) $\sin x - x\cos x$ 2) $\sin x + x\cos x$ 3) $\cos x$ 4) $x + x\cos x$

А5. Найдите производную функции $y = x^2 + \sin x$ в точке $x_0 = \pi$.

1) $\pi^2 - 1$ 2) $2\pi + 1$ 3) $2\pi - 1$ 4) 2π

А6. Вычислите значение производной функции $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} + 2x$ в точке $x_o=2$.

1) 10 2) *12* 3) *8* 4) *6*

А7. Найдите производную функции $y = \sin(3x + 2)$.

1) $\cos(3x+2)$ 2) $-3\cos(3x+2)$ 3) $3\cos(3x+2)$ 4) $-\cos(3x+2)$

А8. Вычислите значение производной функции $y = 3x^2 - 12\sqrt{x}$ в точке $x_o = 4$.

1) *21* 2) *24* 3) *0* 4) *3,5*

A9. Вычислите значение производной функции $y=\frac{1}{2}tg\left(4x-\pi\right)+\frac{\pi}{4}$

в точке $x_0=\frac{\pi}{4}$. 1) *2* 2) $\frac{\pi}{4}$ 3) *4* 4) $\frac{\pi}{2}$

A10. Найдите производную функции $y=x^2\cos x$.

1) $2x\sin x$ 2) $-2x\sin x$ 3) $2x\cos x+x^2\sin x$ 4) $2x\cos x-x^2\sin x$

B1. Вычислите значение производной функции $y=14\sqrt{2x-3}$ в точке x_o= *26*.

B2. Найдите значение *x*, при которых производная функции $y=\frac{x-2}{x^2}$ равна *0*.

Вариант 2

A1. Найдите производную функции $y=\frac{1}{3}x^6$.

1) $2x^6$ 2) $2x^5$ 3) $\frac{1}{3}x^5$ 4) $6x^5$

A2. Найдите производную функции $y=12-5x$.

1) *7* 2) *12* 3) *-5* 4) *-5x*

A3. Найдите производную функции $y=\frac{x+3}{x}$.

1) $\frac{3}{x^2}$ 2) $\frac{2x-3}{x^2}$ 3) $-\frac{3}{x^2}$ 4) $-\frac{3}{x}$

A4. Найдите производную функции $y=x\cos x$.

1) $\cos x-x\sin x$ 2) $\cos x+x\sin x$ 3) $-\sin x$ 4) $x-\sin x$

A5. Найдите производную функции $y=x^2+\cos x$ в точке $x_0=\frac{\pi}{2}$.

1) π^2-1 2) $\pi+1$ 3) $\frac{\pi}{2}-1$ 4) $\pi-1$

A6. Вычислите значение производной функции $y=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+3x$ в точке x_o=*2*.

1) *13* 2) *3* 3) *8* 4) *27*

A7. Найдите производную функции $y=\cos\left(5x-2\right)$.

1) $-2\sin\left(5x-2\right)$ 2) $-5\sin\left(5x-2\right)$ 3) $5\sin\left(5x-2\right)$ 4) $\sin\left(5x-2\right)$

A8. Вычислите значение производной функции $y=\frac{3}{x}-\sqrt{x}$ в точке $x_0=\frac{1}{4}$.

1) *-47* 2) *-49* 3) *47* 4) *11,5*

А9. Вычислите значение производной функции $y = 1 + ctg\left(2x + \pi\right)$

в точке $x_0 = -\dfrac{\pi}{4}$. 1) *2* 2) *-1* 3) *-2* 4) $-\dfrac{1}{2}$

А10. Найдите производную функции $y = x^2 \sin x$.

1) $2x\cos x$ 2) $2x\sin x - x^2 \cos x$ 3) $2x\sin x + x^2 \cos x$ 4) $-2x\cos x$

В1. Вычислите значение производной функции $y = 30\sqrt{4 - 3x}$ в точке x_o= *-7.*

В2. Найдите значение *x,* при которых производная функции $y = \dfrac{x+2}{x^2}$ равна *0.*

Ответы:

Вариант	А1	А2	А3	А4	А5	А6	А7	А8	А9	А10	В1	В2
1	1	3	4	2	3	2	3	1	1	4	2	4
2	2	3	3	1	4	1	2	2	3	3	-9	-4

А1	А2	А3	А4	А5	А6	А7	А8	А9	А10	В1	В2
1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3

«2»	«3»	«4»	«5»
0-10 б.	11-14 б.	15-17 б.	18-20 б.

Контрольная работа №2 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Цель работы: закрепить навык решения дифференциальных уравнений I порядка с разделяющимися переменными.
Необходимо знать: определение дифференциального уравнения I порядка с разделяющимися переменными, метод их решения.
Необходимо уметь: решать дифференциальные уравнения I порядка с разделяющимися переменными и выполнять проверку.
Теоретическая часть
Определение 1. Уравнение, содержащее дифференциал функции или производную, называется дифференциальным.

Например: $y' = 4x^4 - 5x$, $(3 - x)dy = y^2 dx$, $\dfrac{dy}{dx} = 6\sin x$.

Определение 2. Решением дифференциального уравнения называется всякая функция, которая обращает данное уравнение в истинное равенство.

Упражнение. Проверить: Является функция $y = e^{-2x}$ решением дифференциального уравнения $y' = -2y$.

Проверка:

Найдём производную функции:

$y' = (e^{-2x})' = e^{-2x} \quad (2x)' = e^{-2x} \quad (-2) = -2e^{-2x}$

Подставим найденное выражение в левую часть уравнения:

$-2e^{-2x} = -2e^{-2x}$ Левая часть равна правой, следовательно, данная функция $y = e^{-2x}$ является решением дифференциального уравнения $y' = -2y$.

Определение 3. Уравнение вида $\varphi(y)dy = f(x)dx$, в котором переменные расположены в разных частях уравнения, называется **дифференциальным уравнением I порядка с разделяющимися переменными.**

Метод решения основан на **интегрировании** каждой части уравнения.

Пример 1. Решить уравнение: $y' = 2x$.

Решение: из формулы дифференциала функции $dy = y'dx$ выразим производную $y' = \frac{dy}{dx}$.

Подставим в уравнение. Уравнение примет вид: $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Домножим уравнение на **dx**, тогда $dy = 2x \cdot dx$

Переменные разделены. Можно интегрировать: $\int dy = 2\int x \cdot dx$

$$y = \frac{2 \cdot x^2}{2} + C$$

$y = x^2 + C$ - это решение называется **общим**.

Пусть заданы значения переменных $x=1$, $y=3$ – это начальные условия. Они нужны, чтобы получить **частное решение**, в котором будет определено значение константы **C**. Подставим значения переменных в уравнение и выразим **C.**

$3=1^2 + C \Rightarrow C = 3-1 = 2$

$y = x^2 + 2$ - частное решение дифференциального уравнения.

Пример 2. Найти частное решение: $xdy - ydx = 0$ (5;10)

Решение: $xdy = ydx$

Разделим уравнение на xy

$\frac{xdy}{xy} = \frac{ydx}{xy}$ Сократим дроби.

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ Можно интегрировать:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$\ln|y| = \ln|x| + C$ Заменить $C \approx \ln C$

$\ln|y| = \ln|x| + \ln C$ По теореме о логарифмах $\ln|y| = \ln C|x|$

тогда общим решением будет: $|y| = C \cdot |x|$ или y=Cx

Подставим координаты точек: $x=5$, $y=10$

$10 = C \cdot 5 \Rightarrow C = \frac{10}{5} = 2$

Таким образом, $y=2x$ - частное решение.

Пример 3. Найти частное решение: $2y' = y$ (0;1)

Решение: $2\frac{dy}{dx} = y$ (т.к. $y' = \frac{dy}{dx}$)

$2dy = ydx$ Разделим уравнение на «**y**»

$\frac{2dy}{y} = \frac{ydx}{y}$

$2\int \frac{dy}{y} = \int dx$

$2\ln|y| = x + C$ Пусть C $\approx$ lnC и $x = \ln e^x$.

$2\ln|y| = \ln e^x + \ln C$. По теоремам о логарифмах получаем: $\ln y^2 = \ln\left(Ce^x\right)$

$y^2 = Ce^x$ -общее решение

Пусть *y=0, y*=1, определим **С.**

$1^2 = Ce^0$

$1 = C \cdot 1$

C=1

$y^2 = 1e^x$

$y^2 = e^x$ - частное решение дифференциального уравнения.

Пример 4. Найти общее решение: $\frac{3x-2}{y+4} = \frac{dx}{dy}$

Решение: преобразуем уравнение к виду: *(*3*x*-2*)dy=(y*+4*)dx*

Разделим уравнение на (3*x*-2)(*y*+4)

$\frac{dy}{y+4} = \frac{dx}{3x-2}$ Можно интегрировать: $\int \frac{dy}{y+4} = \int \frac{dx}{3x-2}$.

Данные интегралы решаем методом подстановки

а) $\int \frac{dy}{y+4} = \begin{bmatrix} z = y+4 \\ dz = (y+4)'dy \\ dz = dy \end{bmatrix} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| = \ln|y+4|.$

б) $\int \frac{dx}{3x-2} = \begin{bmatrix} z = 3x-2 \\ dz = (3x-2)'dx \\ dz = 3dx \\ dx = \frac{dz}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{3}\ln|z| + C = \frac{1}{3}\ln|3x-2| + C.$

Результаты подставить в уравнение:

$\ln|y+4| = \frac{1}{3}\ln|3x+2| + \ln C$, где C $\approx$ lnC

$\ln|y+4| = \ln(3x+2)^{\frac{1}{3}} + \ln C$ (по теоремам о логарифмах)

$\ln|y+4| = \ln C(3x+2)^{\frac{1}{3}}$

$y + 4 = C \cdot \sqrt[3]{3x+2}$

$y = C\sqrt[3]{3x+2} - 4$ -общее решение

Проверьте себя:

№	Примеры	Ответы
1.	$y' = 11 - 5x^3$ (-1;1)	$y = 11x - \frac{5}{4}x^4 + 13\frac{1}{4}$
2.	$\frac{2dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$ $(1;\sqrt{2})$	$y^2 = 2x$
3.	$2y(x+1)dx = xdy$	$y = Cx^2e^{2x}$

Задание№1. Проверить, является ли функция решением дифференциального уравнения.

1	$y=\frac{1}{3}x^3+x+5$ $y'=3x^2+1$	**2**	$y=x^2+7x+10$ $y'=2x+7$
3	$y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+8$ $y'=x^2+x+1$	**4**	$y=3x^4+\frac{1}{2}x+3$ $y'=12x^3+\frac{1}{2}$
5	$y=\frac{1}{3}x^3+x+3$ $\quad y'=x^2$	**6**	$y=x^2+10$ $\quad y'=2x$
7	$y=\frac{1}{2}x^4+3x^2+7$ $y'=4x^3+9x^2$	**8**	$y=x^3+4x^2+x$ $y'=3x^2+8x$
9	$y=x^3-10x^2+11$ $y'=3x-20$	**10**	$y=\frac{x^4}{4}+7x$ $\quad y'=x^3+7$
11	$y=2x^3-5x^2$ $y'=5x^2-10x$	**12**	$y=4\cos 4x$ $\quad y'=\sin 4x$
13	$y=e^{5x}$ $\quad y'=5y$	**14**	$y=x^6+3x^2+5$ $y'=6x^5+6x$
15	$y=tg8x$ $y'=\frac{8}{\cos^2 8x}$	**16**	$y=e^{9x}$ $\quad y'=\frac{1}{9}y$

Задание№2. Найти частное решение.

1	$(2-y)dy=xdx$	(1;2)	**2**	$y'=2x-5$	$(1;-4)$
3	$xdx=dy$	(1;0)	**4**	$xdx=ydy$	(2;1)
5	$(x-1)dx+ydy=0$	(2;0)	**6**	$2y'=1+2x^2$	(0;0)
7	$x^2dx=y^3dy$	(-1;1)	**8**	$2ydy=(1+x)dx$	(1;4)
9	$y'=8x^2-15$	(0;-4)	**10**	$\frac{dy}{dx}=1-5x$	(1;1)
11	$ydy=(7x-1)dx$	(0;1)	**12**	$y'=x^3+2x^2-12$	(0;-4)
13	$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{2y}$	(-1;2)	**14**	$xdx-3dy=0$	(0;5)
15	$y'=2x-6$	(0;4)	**16**	$dy=(2x^3-5x)dx$	(1;1)

Задание №3. Найти общее решение.

1	$\frac{dy}{dx}=2(y-3)$	**2**	$(1+y^3)xdx-(1+x^2)y^2dy=0$
3	$(y-4)dx+x^2dy=0$	**4**	$(1-x)dy-(y-1)dx=0$
5	$(2x-1)dy=(y+1)dx$	**6**	$2(x+1)dy=ydx$

7	$x^2dy+(y-1)dx=0$	**8**	$(x^2+1)dy=xydx$
9	$(3x+2)dy=(4y+3)dx$	**10**	$(y^2-4)dx+x^2ydy=0$
11	$(x+1)dy=2ydx$	**12**	$y'=2y-1$
13	$(x+1)dy=(2y+1)dx$	**14**	$2(x+1)dy=ydx$
15	$y(x^2+1)dx=xdy$	**16**	$(1-x^2)dy+xydx=0$

Практическая работа №3: Операции над матрицами, вычисление определителей, нахождение обратной матрицы, вычисление ранга матрицы. Применение математических методов для решения профессиональных задач

Краткая теория

Матричные модели представляют собой модели, построенные в виде таблиц (матриц).Эти модели находят широкое применение при решении плановых или экономических задач и при обработке больших массивов информации. Матрица – прямоугольная таблица чисел. Например:

товар	Склад 1	Склад 2	Склад 3
Сахар	200	100	150
Соль	350	200	180
мука	400	250	260

Эти данные можно записать в виде матрицы (*)

$$\begin{matrix} 200 & 100 & 150 \\ 350 & 200 & 180 \\ 400 & 250 & 260 \end{matrix} = A \quad (*)$$

Коэффициенты при неизвестных системы линейных уравнений

3x-5y+z=14

X+3y-7z=-22

2x+y-3z=-6 можно записать в виде матрицы (**)

$$\begin{matrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -3 \end{matrix} = A \ (**)$$

Матрица-прямоугольная таблица чисел. Любое число такого массива называется элементом матрицы. Ряд чисел, расположенных в матрице горизонтально называется строкой, а вертикально – столбцом. Количество строк – m, количество столбцов – n, если m=n – матрица квадратная

Размерность матрицы – количество элементов в ней.

$$A=\begin{matrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{matrix}$$

Воображаемая линия квадратной матрицы, пересекающая ее от a_{11} до a_{mn} называется главной диагональю. Квадратная матрица, в которой все элементы, кроме расположенных на главной диагонали, равны нулю, называется диагональной. Диагональная матрица, у которой все элементы, расположенные по главной диагонали – единицы, называется единичной.

Матрица, состоящая из одного столбца, называется вектор-столбцом.

Матрица, состоящая из одной строки, называется вектор-строкой.

Суммой (разностью) двух матриц A и B, имеющих mстрок иnстолбцов, называется матрица, полученная в результате сложения (вычитания) одноименных элементов матриц A и B. Получаемая в результате матрицы C имеет ту же размерность m*n.

Матрицу можно умножить на число, для этого надо на это число умножить каждый элемент матрицы.

Умножение матрицы-строки на матрицу-вектор:
A=(a1, a2, a3) –вектор-строка.

$$B = \begin{vmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{vmatrix}$$ - вектор-столбец

C=A*B = $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = \sum_{i=1}^{3} ai \cdot bi$

Произведением двух матриц - матрицы A(m·n) на матрицу B(n·p) – называется матрицаC(m·p), каждый элемент которой вычисляется по формуле: $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение матрицы.
2.Что называют элементами матрицы.
3.Какая матрица называется квадратной? Диагональной? Единичной? Вектор-столбцом? Вектор-строкой?
4.Дайте определение суммы матриц.
5.Сформулируйте правило умножения матрицы на число.
6.Сформулируйте правило умножения матриц.

Задания

1. Сложить матрицы $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$= A; $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$ = B.

2.Вычесть из матрицы A матрицу B: A=$\begin{vmatrix} 9 & 7 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$; B=$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$.

3. Умножить матрицу A на матрицу B:A= $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; B=$\begin{vmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{vmatrix}$.

4. Сложить, вычесть и умножить каждую матрицу на 5 :

А) A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ б) A = $\begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 \\ 7 & 6 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & -8 & 17 \end{pmatrix}$

Шкала оценки:
0 баллов - признак отсутствует
1 балл - признак присутствует частично
2 балла - признак присутствует в полном объеме
Оценка: «5» -24-28 баллов; «4» - 17-23 баллов; «3» - 10-16 баллов; «2»- 0-9 баллов

Контрольная работа №3 «Матрицы и определители»

Краткая теория

Определитель второго порядка вычисляется по формуле:

$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$, результат вычисления – любое действительное число.

2) Для вычисления определителя третьего порядка (матрицы 3×3) применяют правило треугольника (Сарруса), по которому составляют формулу, аналогичную формуле пункта 1.

Элементы главной диагонали и ее параллелей умножаются со знаком «плюс», элементы побочной диагонали и ее параллелей – со знаком «минус», тогда:

$$\Delta A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}$$

3) Для вычисления матрицы, обратной данной, необходимо:

1. Найти определитель Δ заданной матрицы по формулам пункта 1 и 2.
2. Найти алгебраические дополнения по формулам:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3. Составить матрицу: $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$

Транспортировать ее (строки и столбцы поменять местами)

$A^{T}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ и найти обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

4. Проверка производится по формуле:

$$A\cdot A^{-1}=E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Практическая работа № 4: Решение системы линейных уравнений по правилу Крамера и методом Гаусса. Применение математических методов для решения профессиональных задач

При решении системы уравнений **по <u>правилу Крамера</u>** необходимо:

1) Найти определитель Δ матрицы системы, которая состоит из коэффициентов при неизвестных **x, y, z**по правилу треугольника.

2) Составить матрицу-столбец свободных коэффициентов.

3) Найти определитель при первом неизвестном **(x)**. Для этого нужно вместо первого столбца матрицы системы подставить столбец свободных коэффициентов и найти Δx.

4) Аналогично определить Δy и Δz.

5) Найти **x, y, z** по формулам $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta A},\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta A},\ z = \dfrac{\Delta z}{\Delta A}.$ Сделать проверку.

6) Если $\Delta = 0$, то система решений не имеет.

Пример решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными по формулам Крамера

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Коэффициенты при неизвестных составляют матрицу системы A

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, а свободные коэффициенты

матрицу – столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

$\det A = \Delta$ (определитель системы)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Если в определителе поочередно менять столбец коэффициентов при x_1, x_2, x_3 на столбец свободных коэффициентов, то получим следующие определители:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a13 \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}, \text{ } \textit{тогда } x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

Решением системы будет являться конечная последовательность чисел c_1, c_2, c_3, при которых каждое уравнение системы обращается в верное числовое равенство.

Особенности решения:

1) $\Delta = 0, \ \Delta x_i \neq 0, \ i = 1, 2, 3$ *система решений не имеет*

$\Delta x_{i=1,2,3} = 0$ *коэффициенты при неизвестных пропорциональны*

Система имеет множество решений.

Пример 1**.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 8y + Z = 2 & (1) \\ 3x - 2y + 6Z = -7 & (2) \\ 2x + y - Z = -5 & (3) \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$Z = \frac{\Delta Z}{\Delta} = \frac{107}{-107} = -1 \qquad (-3; 2; -1)$$

Проверка:

Ответ: (-3; 2; -1).

Метод Гаусса (метод исключения переменных)

1) На первом месте в системе уравнений должно стоять уравнение, коэффициент перед первым неизвестным в котором самый наименьший.

2) Исключить последовательно переменные из уравнений путем уравнения коэффициентов перед ними и алгебраического сложения.

Пример 17:Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 2y - Z = 4 & (1) \\ 2x - y + 3Z = 9 & (2) \\ x - 2y + 2Z = 3 & (3) \end{cases}$$

Решение:

1) Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x-2y+2Z=3 & (1) \\ 3x+2y-Z=4 & (2) \\ 2x-y+3Z=9 & (3) \end{cases}\left|\begin{matrix} 3 \\ \\ \\ \end{matrix}\right| \quad 2$$

(2)-(1)·3

$$\begin{array}{l} 3x+2y-Z=4 \\ - \\ \underline{3x-6y+6Z=9} \\ 8y-7Z=-5 \end{array} \qquad (2)'$$

(3) –(1)·2

$$\begin{array}{l} 2x-y+3Z=9 \\ - \\ \underline{2x-2y+4Z=6} \\ 3y-Z=3 \end{array} \qquad (3)'$$

2) Запишем новую систему:

$$\begin{cases} x-2y+2Z=3 & (1) \\ 8y-7Z=-5 & (2)' \\ 3y-Z=3 & (3)' \end{cases}\left|\begin{matrix} \\ 3 \\ 8 \end{matrix}\right.$$

$(3)'\cdot 8-(2)'\cdot 3$

$$\begin{array}{l} 24y-8Z=24 \\ - \\ \underline{2y-21Z=-15} \\ 13Z=39 \end{array} \qquad (3)''$$

3)

$$\begin{cases} x-2y+2Z=3 & (1) \\ 8y-7Z=-5 & (2)' \\ 13Z=39 & (3)'' \end{cases} \Rightarrow Z=3, \left|\begin{matrix} 8y-21=-5 \\ 8y=16 \\ y=2 \end{matrix}\right| \quad \begin{matrix} x-2\cdot 2+2\cdot 3=3 \\ \\ x=1 \end{matrix}$$

Проверка: $\begin{cases} 3\cdot 1+2\cdot 2-3=4 & 4=4\,(B) \\ 2\cdot 1-2+3\cdot 3=9 & 9=9\,(B) \\ 1-2\cdot 2+2\cdot 3=3 & 3=3\,(B) \end{cases}$

Ответ: (1; 2; 3).

Шкала оценки:

0 баллов - признак отсутствует

1 балл - признак присутствует частично

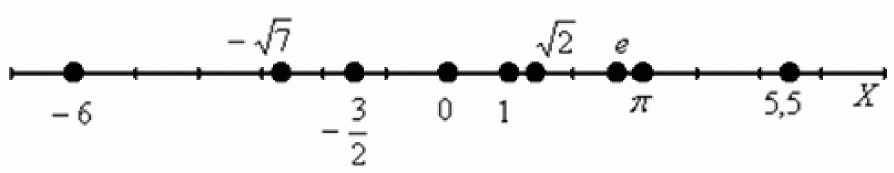
2 балла - признак присутствует в полном объеме

Оценка: «5» -20-24 баллов; «4» - 13-19 баллов; «3» - 8-12 баллов; «2»- 0-7 баллов

Практическая работа № 5: Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах, переход от алгебраической формы к тригонометрической и к показательной и обратно. Применение математических методов для решения профессиональных задач

Краткая теория

Сначала вспомним «обычные» школьные числа. В математике они называются **множеством действительных чисел** и обозначаются буквой $\mathbf{R}$ (в литературе, рукописях заглавную букву «эр» пишут жирной либо утолщённой). Все действительные числа сидят на знакомой числовой прямой:



Здесь и целые числа, и дроби, и иррациональные числа. При этом каждой точке числовой обязательно соответствует некоторое действительное число.

Комплексным числом z называется число вида $Z=a+bi$, где a и b – действительные числа, i – так называемая *мнимая единица*. Число a называется *действительной частью Rez* комплексного числа Z , число b называется *мнимой частью Imz* комплексного числа z .

a+bi – это ЕДИНОЕ ЧИСЛО, а не сложение. Действительную и мнимую части комплексного числа, в принципе, можно переставить местами Z=a+bi: или переставить мнимую единицу: Z=a+bi – от этого комплексное число не изменится. **Но стандартно комплексное число принято записывать именно в таком порядке**: Z=a+bi

Чтобы всё было понятнее, сразу приведу геометрическую интерпретацию. Комплексные числа изображаются на *комплексной плоскости*:
Множество же **комплексных чисел** принято обозначать «жирной» или утолщенной буквой $\mathbf{C}$. Поэтому на чертеже следует поставить букву $\mathbf{C}$, обозначая тот факт, что у нас комплексная плоскость/ Комплексная плоскость состоит из двух осей: Rez – действительная часть; Imz- мнимая часть.

Правила оформления чертежа практически такие же, как и для чертежа в декартовой системе координат. По осям нужно задать размерность, отмечаем: ноль; единицу по действительной оси; мнимую единицу i по мнимой оси.

Построим на комплексной плоскости следующие комплексные числа:

$z_1 = 0$, $z_2 = -3$, $z_3 = 2$

$z_4 = i$, $z_5 = -\sqrt{3}i$, $z_6 = 4i$

$z_7 = 2 + 3i$, $z_8 = -4 + i$, $z_9 = -3 - 3i$, $z_{10} = \sqrt{2} - i$

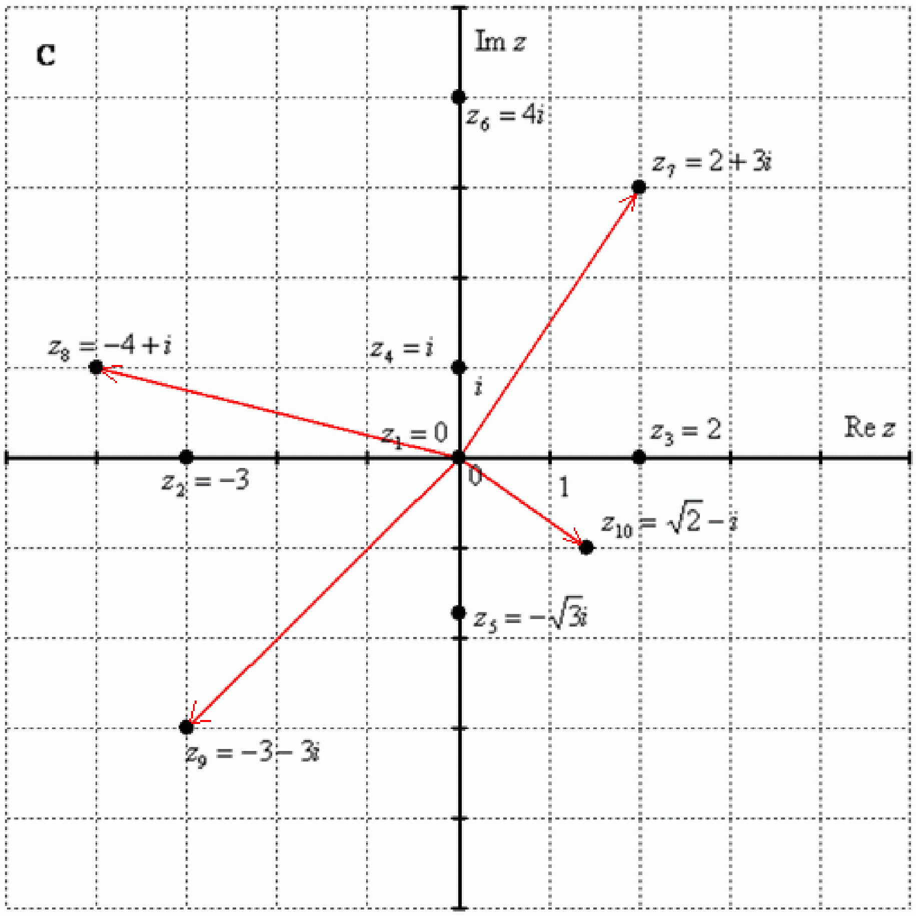


Рис.5.1.

Рассмотрим следующие комплексные числа: z_1=0; z_2= -3; z_3= 2 – это комплексные числа с нулевой мнимой частью. Они располагаются строго на действительной оси Rez

Числа z_4= i; x_5 = $-\sqrt{3}$ i; z_6 = 4i, – это, наоборот, чисто мнимые числа, т.е. числа с нулевой действительной частью. Они располагаются строго на мнимой оси $\operatorname{Im} z$.

В числах $z_7 = 2+3i$, $z_8 = -4+i$, $z_9 = -3-3i$, $z_{10} = \sqrt{2} - i$ и действительная и мнимая части не равны нулю. Такие числа тоже обозначаются точками на комплексной плоскости, при этом, к ним принято проводить радиус-векторы из начала координат (обозначены красным цветом на чертеже). Радиус-векторы к числам, которые располагаются на осях, обычно не чертят, потому что они сливаются с осями.

Сложение комплексных чисел

Пример 1. Сложить два комплексных числа $z_1 = 1+3i$, $z_2 = 4-5i$

Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части: $z_1 + z_2 = 1+3i+4-5i = 5-2i$

Вычитание комплексных чисел

Пример 2 Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, если $z_1 = -2+i$, $z_2 = \sqrt{3} + 5i$

Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:

$z_1 - z_2 = -2+i-(\sqrt{3}+5i) = -2+i-\sqrt{3}-5i = -2-\sqrt{3}-4i$

действительная часть в этом числе – составная: $-2-\sqrt{3}$. Для наглядности ответ можно переписать так: $z_1-z_2=(-2-\sqrt{3})-4i$.
Рассчитаем вторую разность:
$z_2-z_1=\sqrt{3}+5i-(-2+i)=\sqrt{3}+5i+2-i=2+\sqrt{3}+4i$

Здесь действительная часть тоже составная: $2+\sqrt{3}$
Чтобы не было какой-то недосказанности, приведу короткий пример с «нехорошей» мнимой частью: $-1+\sqrt{2}i+7-3i=6+(\sqrt{2}-3)i$. Вот здесь без скобок уже не обойтись.

Умножение комплексных чисел

Настал момент познакомить вас со знаменитым равенством: $i^2=-1$

Пример 3 Найти произведение комплексных чисел $z_1=1-i$, $z_2=3+6i$ Очевидно, что произведение следует записать так: $z_1\cdot z_2=(1-i)(3+6i)$ далее надо раскрыть скобки по правилу умножения многочленов.
$z_1\cdot z_2=(1-i)(3+6i)=1\cdot 3-i\cdot 3+1\cdot 6i-i\cdot 6i=3-3i+6i+6=9+3i$

Понятно, что $-i\cdot 6i=-6i^2=-6\cdot(-1)=+6$

Деление комплексных чисел

Пример 4 Даны комплексные числа $z_1=13+i$, $z_2=7-6i$. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.
Составим частное:
$\frac{z_1}{z_2}=\frac{13+i}{7-6i}$ Деление чисел осуществляется методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение.

Вспоминаем бородатую формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ и смотрим на наш знаменатель: $7-6i$. В знаменателе уже есть $(a-b)$, поэтому сопряженным выражением в данном случае является $(a+b)$, то есть $7+6i$ Согласно правилу, знаменатель нужно умножить на $7+6i$, и, чтобы ничего не изменилось, домножить числитель на то же самое число $7+6i$:
$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}$ Далее в числителе нужно раскрыть . А в знаменателе воспользоваться формулой $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ (помним, что $i^2=-1$) Подробн

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}=\frac{91+7i+78i+6i^2}{7^2-(6i)^2}=\frac{91+7i+78i-6}{49-(-36)}=$$
$$=\frac{85+85i}{49+36}=\frac{85+85i}{85}=1+i$$

Пример 5 Дано комплексное число $z=\frac{1}{\sqrt{3}+i}$. Записать данное число в алгебраической форме (т.е. в форме $a+bi$).Приём тот же самый – умножаем знаменатель и числитель на сопряженное знаменателю выражение. Снова смотрим на формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.
В знаменателе уже есть $(a+b)$, поэтому знаменатель и числитель нужно домножить на сопряженное выражение $(a-b)$, то есть на $\sqrt{3}-i$:

$$z=\frac{1}{\sqrt{3}+i}=\frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3})^2-(i)^2}=\frac{\sqrt{3}-i}{3+1}=\frac{\sqrt{3}-i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i$$

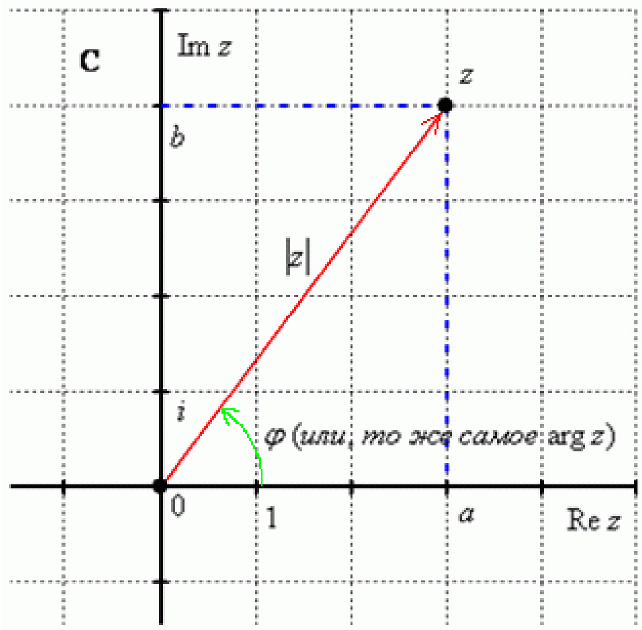


Рис. 5.2.

Модулем комплексного числа z называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, **модуль – это длина**радиус-вектора, который на чертеже обозначен красным цветом.

Модуль комплексного числа z стандартно обозначают: $|z|$ или r
По теореме Пифагора легко вывести формулу для нахождения модуля комплексного числа: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение комплексного числа
2. Как изображается комплексное число на координатной плоскости?
3.Как вычислить сумму комплексных чисел? Разность: произведение?
4.Как разделить одно комплексное число на другое?
5.дайте определение модуля комплексного числа.

Задания

1. Вычислить сумму комплексных чисел: z_1+z_2-? $z_1=2+3i$ $z_2= 4-6i$; $z_1=15$ $z_2= -3i$; $z_1=2-4i$ $z_2=2$.
2.Вычислить разность этих же чисел.
3.Вычислить произведение этих же чисел.
4. Вычислить z_1/z_2 и z_2/z_1 этих же чисел.

Шкала оценки:

0 баллов - признак отсутствует
1 балл - признак присутствует частично
2 балла - признак присутствует в полном объеме

Оценка: «5» -27-32 баллов; «4» - 19-26 балла; «3» - 10-18 баллов; «2»- 0-9 баллов

Контрольная работа №5 «Комплексные числа»

Вариант 1	Вариант 2
1. Даны комплексные числа: $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = i + 1$, $z_3 = -1 - i$. Вычислите: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 + z_3$; в) $z_1 - z_2$; г) $z_2 - z_3$; д) $z_1 \cdot z_2$; е) $z_3 \cdot z_2$. 2. Вычислите: а) $(2 - i)(2 + i) - (3 - 2i) + 7$; б) $(1 + i)^4$. 3. Найти частное комплексных чисел: а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{1}{1+i}$; в) $\frac{5-i}{i+2}$. 4. Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме: а) -3; б) $-i$; в) $1 + i$; г) $-1 + i\sqrt{3}$. 5. Найти координаты точки M, изображающей комплексное число $z = \frac{5i-2}{3i+1} + i + \frac{8i-3}{2-i}$. 6. Решите уравнения в комплексных числах: а) $x^2 - 4x + 8 = 0$; б) $x^2 + ix + 6 = 0$.	1. Даны комплексные числа: $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3i + 1$, $z_3 = -2 - i$. Вычислите: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 + z_3$; в) $z_1 - z_2$; г) $z_2 - z_3$; д) $z_1 \cdot z_2$; е) $z_3 \cdot z_2$. 2. Вычислите: а) $(3 + i)(3 - i) - (6 + 2i) + 7$; б) $(i - 1)^4$. 3. Найти частное комплексных чисел: а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{1}{1-i}$; в) $\frac{3+i}{i-2}$. 4. Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме: а) -4; б) i; в) $1 - i$; г) $-\sqrt{3} + i$. 5. Найти координаты точки M, изображающей комплексное число $z = \frac{2-3i}{2i+1} - i + \frac{6i-4}{i+2}$. 6. Решите уравнения в комплексных числах: а) $x^2 - 8x + 17 = 0$; б) $x^2 + ix + 20 = 0$.

Вариант 1	Вариант 2
1. Даны комплексные числа: $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = i + 1$, $z_3 = -1 - i$. Вычислите: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 + z_3$; в) $z_1 - z_2$; г) $z_2 - z_3$; д) $z_1 \cdot z_2$; е) $z_3 \cdot z_2$. 2. Вычислите: а) $(2 - i)(2 + i) - (3 - 2i) + 7$; б) $(1 + i)^4$. 3. Найти частное комплексных чисел: а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{1}{1+i}$; в) $\frac{5-i}{i+2}$. 4. Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме: а) -3; б) $-i$; в) $1 + i$; г) $-1 + i\sqrt{3}$. 5. Найти координаты точки M, изображающей комплексное число	1. Даны комплексные числа: $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3i + 1$, $z_3 = -2 - i$. Вычислите: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 + z_3$; в) $z_1 - z_2$; г) $z_2 - z_3$; д) $z_1 \cdot z_2$; е) $z_3 \cdot z_2$. 2. Вычислите: а) $(3 + i)(3 - i) - (6 + 2i) + 7$; б) $(i - 1)^4$. 3. Найти частное комплексных чисел: а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{1}{1-i}$; в) $\frac{3+i}{i-2}$. 4. Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме: а) -4; б) i; в) $1 - i$; г) $-\sqrt{3} + i$. 5. Найти координаты точки M, изображающей комплексное число

$z = \frac{5i-2}{3i+1} + i + \frac{8i-3}{2-i}$. 6. Решите уравнения в комплексных числах: а) $x^2 - 4x + 8 = 0$; б) $x^2 + ix + 6 = 0$.	$z = \frac{2-3i}{2i+1} - i + \frac{6i-4}{i+2}$. 6. Решите уравнения в комплексных числах: а) $x^2 - 8x + 17 = 0$; б) $x^2 + ix + 20 = 0$.

Самостоятельная работа

Выполнение упражнений по теме «Операции над множествами, операции над графами»

Цель: закрепить навыки осуществления операций над множествами, навыки использования диаграмм Эйлера-Венна.

Перед началом занятия необходимо знать: понятия множества, подмножества, универсального множества, пересечения множеств, объединения множеств, разности двух множеств и дополнения; понятие диаграмм Эйлера-Венна.

После окончания занятия необходимо уметь: находить пересечение, объединение, разность и дополнение множеств, в том числе с использованием диаграмм Эйлера-Венна.

Основные теоретические положения и примеры решения типовых заданий.

Понятие множества. Подмножества.

Понятие множества относится к аксиоматическим понятиям математики.

Множество – совокупность определённых, различимых между собой объектов, рассматриваемых как единое целое, и обладающая некоторым общим свойством.

Имеется три важных момента, характеризующих понятие множества:

1) объекты, входящие во множество, определённые – т.е. для каждого объекта можно однозначно сказать, принадлежит ли он данному множеству или нет;

2) объекты, входящие во множество, различимы между собой – т.е. во множестве не может быть двух или более одинаковых объектов;

3) все объекты, входящие во множество, мыслятся как единое целое – т.е. во множестве абстрагируются от свойств отдельных объектов, но говорят об общем свойстве множества, как единого целого; такое общее свойство называют характеристическим.

Например, можно говорить о множестве всех книг данной библиотеки, множестве всех вершин данного многоугольника, множестве всех натуральных чисел, множестве всех точек данной прямой.

Множества обозначаются прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, D и т.д. Объекты, входящие во множество, называют **элементами**.

Например:

– множество букв русского алфавита;

– множество натуральных чисел;

– множество студентов, сидящих на 1-м ряду.

Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется **конечным**, в противном случае множество называется **бесконечным**. Множество может содержать и всего лишь один элемент. Множество, не содержащее элементов, называется **пустым** и обозначается $\emptyset$.

Множества A и S_1, рассмотренные выше, – конечные, а множество N – бесконечное.

Принадлежность элемента множеству записывается значком $\in$. Например:

– буква «бэ» принадлежит множеству букв русского алфавита;

– буква «бета» не принадлежит множеству букв русского алфавита;

– число 5 принадлежит множеству натуральных чисел;

– число 5,5 – не принадлежит множеству натуральных чисел;

– Вольдемар не сидит в первом ряду.

Таким образом, если множество содержит конечное число элементов, то оно может быть задано перечислением его элементов. Множество может быть также задано при помощи правила, позволяющего определить, является ли данный объект элементом множества или нет. При записи правило, задающее множество, отделяется вертикальной чертой или двоеточием.

Например,

1) - множество чисел, принадлежащих отрезку (подразумевается множество действительных чисел, которые перечислить через запятую уже невозможно);

2) - множество рациональных чисел, то есть, чисел, представимых в виде дроби с целым числителем и натуральным знаменателем.

Множество В называется **подмножеством** множества А, если каждый элемент множества В одновременно является элементом множества А. Иными словами, множество В содержится во множестве А: . Значок называют *значком включения*.

Например:

1. А – это множество букв русского алфавита. Обозначим через С – множество его гласных букв, которое будет подмножеством множества А. Тогда: .
2. Пусть заданы множества А = {1, 3, 5, 7} и В = {3, 5}. Очевидно, что В есть подмножество А, т.е. .
3. Множество N натуральных чисел является подмножеством множества Z целых чисел, т. е. .
4.

Из определения подмножества следует, что любое множество является подмножеством самого себя, т. е. справедливо утверждение . Говорят, что А – самое широкое подмножество А. Пустое множество является подмножеством любого множества. Пустое множество является самым узким подмножеством любого множества.

Зафиксированное каким-либо образом множество объектов, допустимых при данном рассмотрении, называют **универсальным множеством** (базовым множеством, основным множеством, универсумом). Часто обозначается U.

Множества А и В считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Равенство множеств обозначают так: А = В.

Операции над множествами. Диаграммы Эйлера-Венна.

Пересечением множеств А и В называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству А и множеству В. Обозначается .

Объединением множеств А и В называется такое множество , каждый элемент которого содержится хотя бы в одном из множеств А или В. Обозначается .

Разностью двух множеств А и В называется множество , содержащее лишь те элементы из А, которые не входят в В. Обозначается .

Если множество В – подмножество множества А (), то разность называется **дополнением** к В в множестве А. Обозначается .

Дополнением множества А по отношению к универсальному множеству U есть множество , составленное из всех тех элементов U, которые не находятся в А

Практическая часть.

Задания выполняются по вариантам, заданным преподавателем.

Задание 1. Образуйте все подмножества множества букв в слове.

Вариант 1
Вариант 2
Вариант 3
«руль»

«фары»
«диск»

Задание 2. Данные множества задать перечислением всех своих элементов.

Вариант 1

Вариант 2

Вариант 3

$A=\{x\in R|x^3-3x^2+2x=0\}$.

$A=\{x\in Z|\leq 2^x<5\}$

$A=\{x\in N|x^2-3x-4\leq 0\}$

Задание 3. Даны множества A и B. Найти: A∩B, A∪B, A\B, B\A, .

Вариант 1

Вариант 2

Вариант 3

а)

$A, B \subseteq Z$

A = {1;2;5;7;9;11}

B = {1;4;6;7}

$A, B \subseteq Z$

A = {3;6;7;10}

B = {2;3;10;12}

$A, B \subseteq Z$

A = {1;2;5;7;9;11}

B = {1;4;6;7}

б)

A = { a , b , c , d , e , f , k }

B = { a , c , e , k , m , p }

A = { a , b , c , e , k, l, m } B = { c , e , k , x , y, z }

A = { b , c , d , e , f , x, y} B = { a , e ,f , k , n, o}

в)

$A, B \subseteq R$

A = [-3; 7), B = [-4; 4].

$A, B \subseteq R$

A = [1;6), B = [-1;9]

$A, B \subseteq R$

A = [4; 7), B = [3; 6]

г)

Задание 4. Используя диаграммы Эйлера-Венна доказать тождество.

Вариант 1

Вариант 2

Вариант 3

$A\setminus(B \cup C) = (A\setminus B) \cap (A\setminus C)$

$A\cup (B\setminus C) = (A \cap B)\setminus C$

$A\cup(B \setminus C) = (A\cap B) \setminus (A\cap C)$

Дополнительные задания:

Решите задачу используя круги Эйлера: В группе английский язык изучают 15 студентов, немецкий – 10 студентов, а французский – 5, причем 3 студента изучают одновременно английский и немецкий языки, 2 студента изучают одновременно английский и французский языки, 1 студент изучает одновременно французский и немецкий языки. Сколько всего человек в классе изучают эти иностранные языки? Сколько человек изучают только английский язык? немецкий язык? французский язык?

Самостоятельная работа

Выполнение упражнений на построение закона распределения дискретной случайной величины.

Цель: научиться вычислять вероятности суммы совместных и несовместных событий, произведения независимых и зависимых событий.

Для выполнения работы необходимо ***знать*** основы теории вероятностей; необходимо ***уметь***вычислять вероятность событий с использованием элементов комбинаторики.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

1. ***Суммой*** А + В двух событий А и В называют событие, состоящее в появлении события А, или события В, или обоих этих событий.

a. **Теорема сложения вероятностей несовместных событий.** Вероятность появления одного из двух несовместных событий, равна сумме вероятностей этих событий:
$P(A + B) = P(A) + P(B)$

1.

b. **Теорема сложения вероятностей совместных событий.** Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:
$P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB)$

2. ***Произведением*** двух событий А и В называют событие АВ, состоящее в совместном появлении этих событий.

a. **Теорема произведения для независимых событий**. Для независимых событий вероятность совместного появления событий равна произведению вероятностостей этих событий:
$P(AB) = P(A) P(B)$.

b. **Теорема умножения вероятностей.** Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:
$P(AB) = P(A) P_A(B)$.

3. ***Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий.***
Если события A_1, A_2, A_3,… A_n независимы в совокупности, причем $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, $P(A_3) = p_3$ и т.д.; q_1, q_2, q_3, …, q_n – вероятности противоположных событий.
Вероятность наступления события А, состоящего в наступлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, A_3,… A_n равна:
$P(A) = 1 – q_1q_2q_3…q_n$.

4. ***Вероятность появления только одного из двух событий.***
$P(A) = p_1q_2 + p_2q_1$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ И ФОРМА ОТЧЕТНОСТИ

I вариант

II вариант

1.

Среди сотрудников фирмы 28% знают английский язык, 30% – немецкий; английский и немецкий – 8%. Найти вероятность того, что случайно выбранный сотрудник фирмы знает хотя бы один язык.

Имеется 3 ящика, содержащих по 20 деталей. В первом ящике 12, во втором 5 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

2.

Производится бомбометание по трем складам боеприпасов, причем сбрасывается одна бомба. Вероятность попадания в первый склад 0,025; во второй – 0,03; в третий 0,019. При попадании в один из складов взрываются все три. Найти вероятность того, что склады будут взорваны.

В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого, второго и третьего элементов соответственно равны: р, = 0,1; р, = 0,15; р, = 0,2. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет (не работает хотя бы 1 элемент).

3.

Имеется 3 ящика, содержащих по 15 деталей. В первом ящике 5, во втором 7 и в третьем 10 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

Среди студентов группы 15% имеют отличные оценки по математике, 34% – по истории. При этом 12% являются отличниками по обеим дисциплинам. Найти вероятность того, что случайно выбранный студент учится на «отлично» хотя бы по одной дисциплине.

4.

Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

Решить задачу двумя способами.

5.

На полке стоят 6 учебников по математике и 3 по информатике. С полки наудачу берется сначала один учебник. Потом второй. Найти вероятность, что первая взятая книга будет учебником по информатике, а вторая учебником по математике.

В ящике находится 8 стандартных и 6 нестандартных детали. Наудачу вынимается сначала одна деталь, а потом вторая. Найти вероятность, что первая взятая деталь стандартная, а вторая нестандартная.

6.

Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно высшего сорта.

7.

На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете (событие А).

Решить задачу двумя способами.

Мастер обслуживают 5 станков. 20% рабочего времени он проводит у первого станка, 10% - у второго, 15% - у третьего, 25% - у четвертого, 30% - у пятого станка. Найти вероятность того, что в наудачу выбранный момент времени мастер находится у 1, или 2, или 3 станка.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Чем отличается операция сложения вероятностей от произведения?
2. Запишите способы, которыми можно рассчитать вероятность появления хотя бы одного события?

«Закон распределения»

Цель: провести диагностику усвоения основных понятий и формул по теории вероятности и понимания закона распределения

Задачи: выявить уровень усвоения знаний учащимися.

Инструкция по выполнению работы

На ответы на вопросы по математике дается 90 минут. Работа состоит из 25 вопросов на знание определений и математических формул, а также возможности самим привести примеры.

В заданиях нужно написать четкое определение или формулу или привести пример. Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у Вас останется время.

За каждый правильный ответ даётся один балл. Баллы, полученные вами за все выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Вопросы

1. Сформулируйте классическое определение вероятности. В чем ограниченность этого определения? В чем различие между вероятностью и относительной частотой?
2. Когда применяют геометрическое определение вероятности? Почему в этих случаях нельзя пользоваться классическим определением?
3. Дайте определение суммы событий. Приведите примеры: суммы двух несовместных событий; суммы двух совместных событий.
4. Сформулируйте и докажите теорему о сложении вероятностей несовместных событий.
5. Дайте определение произведения событий. Приведите примеры: произведения двух независимых событий; произведения двух зависимых событий.
6. Что такое условная вероятность?
7. Сформулируйте теорему об умножении вероятностей для двух событий (общий случай). Какую форму принимает эта теорема в случае, когда события независимы?
8. Приведите формулу полной вероятности.
9. Приведите формулы Байеса.
10. Что такое схема Бернулли?
11. В каких случаях применяются: формула Бернулли; теорема Пуассона; теорема Муавра-Лапласа?
12. Приведите примеры дискретных и непрерывных случайных величин.
13. Что называется законом распределения вероятностей случайной величины?
14. Что называется математическим ожиданием случайной величины? Как оно обозначается? Докажите его свойства.

15. Что называется дисперсией случайной величины? Как она обозначается? Докажите ее свойства. Как взаимосвязаны среднеквадратическое отклонение и дисперсия?

16. Чему равны числовые характеристики биномиального распределения; распределения Пуассона?

17. Что называется функцией распределения случайной величины? Сформулируйте ее свойства. В чем различие графиков функций распределения для непрерывной и для дискретной случайных величин?

18. Дайте определение плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины, сформулируйте ее свойства.

19. Как найти вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение из данного интервала, если известна: ее функция распределения; ее плотность распределения вероятностей?

20. Как взаимосвязаны функция распределения и плотность распределения вероятностей случайной величины?

21. Найдите M[X] и D[X] случайной величины, распределенной равномерно на интервале (a; $в$).

22. Каков вероятностный смысл параметров a и σ случайной величины, распределенной по нормальному закону? Напишите плотность нормального распределения.

23. В чем заключается “правило трех сигм”? Как, пользуясь этим правилом, найти наименьшее и наибольшее значения нормально распределенной случайной величины?

24. Сколько параметров имеет показательное распределение? Как найти для данного распределения M[X], σ[X]?

Самостоятельная работа

Выполнение упражнений на нахождение математического ожидания, дисперсии, среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины заданной законом распределения.

Цели и задачи: обобщить и систематизировать знания по теме, провести диагностику усвоения системы знаний и умений выполнять задания стандартного уровня.

Время: 135 минут.

Обеспечение практической работы:

Конспект.

Карточки с заданиями.

1. Образуют ли полную группу следующие группы событий:

а) опыт — бросание монеты; события: *Ax* — появление герба; *A2* — появление цифры;

б) опыт — бросание двух монет; события: *Bx* — появление двух гербов; *B2* — появление двух цифр;

в) опыт — два выстрела по мишени; события: *A0* — ни одного попадания; *Ax* — одно попадание; *A2* — два попадания;

г) опыт — два выстрела по мишени; события: *Cx* — хотя бы одно попадание; *C2* — хотя бы один промах;

д) опыт — вынимание карты из колоды; события: *Dx* — появление карты червонной масти; *D2* — появление карты бубновой масти; *D3* — появление карты трефовой масти?

2. В урне а белых (б) и Ъ черных (ч) шаров. Из урны вынимают (одновременно или последовательно) два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми1.

3. В урне *а* белых и *Ь* черных шаров. Из урны вынимаются сразу два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

4. В урне *а* белых, *Ъ* черных и *с* красных (к) шаров. Три из них вынимаются наугад. Найти вероятность того, что по крайней мере два из них будут одноцветными.
5. Бросаются две монеты. Рассматриваются события:
А — выпадение герба на первой монете;
В — выпадение герба на второй монете. Найти вероятность события $C = A + B$.

6. Из полной колоды карт (52 карты) вынимают одновременно четыре карты. Рассматриваются события:
А — среди вынутых карт будет хотя бы одна бубновой масти;
В — среди вынутых карт будет хотя бы одна червонной масти.
Найти вероятность события $C = A + B$.

7. Из полной колоды карт (52 листа) вынимаются сразу четыре карты. Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.

8. В урне о белых и *Ъ* черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар — белый.

9 В урне *а* белых и *Ъ* черных шаров. Из урны вынули один шар и, не глядя, отложили в сторону. После этого из урны взяли еще один шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, — тоже белый.

10. В урне а белых и 6 черных шаров $(a > 2)$. Из урны вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

«2»	«3»	«4»	«5»
0-5	6-8	9	10

«Вычисление математического ожидания и дисперсии случайной величины»

Цель: закрепление теоретического материала по изучению среднего квадратичного отклонения дисперсии дискретной случайной величины

Методические указания

1. Дисперсия имеет размерность равную квадрату размерности случайной величины. Поэтому в тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют не дисперсию, а среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.
Среднее квадратическое отклонение равно корню квадратному из дисперсии, поэтому его размерность равна размерности случайной величины. Например, если *X* выражается в линейных метрах, то $\sigma(X)$ тоже выражается в линейных метрах, а *D*(*X*) – в квадратных метрах.

2. Пример:
Найти среднее квадратичное отклонение случайной величины X, заданной следующим законом распределения:

X
2
4
6
8

P
0.2
0.15
0.35
0.3

Решение.
Найдем математическое ожидание M(X):
$M(X)=2*0.2+4*0.15+6*0.35+8*0.3= 5.5$
Составим закон распределения случайной величины X^2*:*

X^2
4
16
36
64
P
0.2
0.15
0.35
0.3

$M(X^2)=4*0.2+16*0.15+36*0.35+64*0.3=0.8+2.4+12.6+19.2=35$
$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=35-(5.5)^2=35-30.25=4.75$
Найдем среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{4.75} = 2.18$$

Примеры для самостоятельного решения
1. Дано следующее распределение дискретной случайной величины X
X
1
2
4
5
P
0.31
0.1
0.29
0.3
Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение, используя формулы для их определения.

2. Дан ряд распределения дискретной случайной величины X:

x_i	10	20	30	40	50	60
p_i	0,24	0,36	0,20	0,15	0,03	0,02

.
Найти ее математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение.

3. Случайная величина X задана следующим законом распределения:

x_I
1
3
6
8
p_I
0,2
0,1
0,4
0,3

найти *M(x)* – математическое ожидание, *D(x)* – дисперсию, $\sigma(x)$ – среднее квадратическое отклонение случайной величины

4. Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины *X* , которая задана следующим рядом распределения:

X
2
3
10
P
0,1
0,4
0,5

Информационное обеспечение обучения (перечень рекомендуемых учебных изданий, Интернет-ресурсов, дополнительной литературы)

Основные источники

1) Протасов Ю.М. Математический анализ: учебное пособие/ Ю.М. Протасов. - М.: Издательство «Флинта», 2018. - 165 с.
2) Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие.- М.: АСТ, 2018
3) Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика.-М.: Юнити-Дана, 2017
4) Лавров И.А. Математическая логика.-М.: Академия, 2017
5) Лапчик М.П. Численные методы: учебное пособие.- М.: Академия, 2017
6) Чашкин А.В Дискретная математика: учебник - М.: Академия, 2018

Дополнительные источники

1. Прокофьев А.А. Математика. Элементы высшей математики: учебник в 2 томах. Т.1/ В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. – М.: КУРС.: ИНФРА – М., 2017. – 304с. – (Среднее профессиональное образование). – Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/978660
2. Кальней С. Г. Математика Т.2: Учебное пособие. / Кальней С.Г., Лесин В.В., Прокофьев А.А. – М.:КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017. – 360 с.: 60х90 1/16. – (Высшее образование: Бакалавриат) Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?item=bookinfo&book=520538

Электронные библиотечные системы

1. Электронно-библиотечная система Znanium.com

ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ, ВНЕСЕННЫХ В РАБОЧУЮ ПРОГРАММУ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебный год	Вид изменений (объём времени, порядок освоения УД и ПМ и.т.п.)	В какой документ ППССЗвносится изменения	Конкретное содержание изменений	Экспертное суждение о необходимости и целесообразности внесения изменений	Подпись председателя ЦК/ представителей работодателей
2019 - 2020	Изменение названия образовательной организации	*Метод. Рекомендации*	АНПОО "Бурятский кооперативный техникум"	Внесение изменений в Устав ОО	Ахкамова М.И. Протокол № 1 от 29.08.2019 г.
	Включение в список литературы новых источников		1. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учебник для СПО Изд. Академия, 2020 2. Мишнова Л.И., Мишнов А.Е. Математика: уч. пособие для СПО Изд. Инфра - М, 2020 3. Спирина М.С. Дискретная математика: учебник для СПО Изд. Академия, 2020 4. Спирина М.С. Спирин П.А. Дискретная математика. Сборник задач с алгоритмами решений. Изд. Академия 2020	Обновление информационного обеспечения обучения	
2021 - 2022	Включение в список литературы новых источников		1. Григорьев В.П. Сборник задач по высшей математике: Уч. пособие для СПО. Изд. Академия 2021 2. Богомолов Н.В. Математика. Уч. Высш. матем. в задачах (ГОИ) Изд. Курс 2021 3. Численные методы и программирование. Уч. пособие / В.Ю. Колдаев. Форум, ИНФРА-М 2022 4. Гусева А.И. Дискретная математика: учебник для СПО, Изд. Курс, 2022	Обновление информационного обеспечения обучения	Мухаматова С.Е. Протокол № 1 от 30.08.2021 г.

ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ, ВНЕСЕННЫХ В МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ЕН.01 МАТЕМАТИКА

Учебный год	Вид изменений (объём времени, порядок освоения УД и ПМ и.т.п.)	В какой документ ППССЗ вносятся изменения	Конкретное содержание изменений	Экспертное суждение о необходимости и целесообразности внесения изменений	Подпись председателя ЦК/ представителей работодателей
2021-2022	Включение планируемых личностных результатов (ЛР)	Методические рекомендации по выполнению практических работ	Включение следующих планируемых результатов: ЕН.01 Математика ЛР 1-12, согласно Рабочей программы воспитания 42.02.01 Реклама	Приказ Минпросвещения России № П-7 от 27.01.2022	Мухаметова С.Е Протокол №1 от 30.08.2021г